

Axialsymmetrische magnetohydrodynamische Gleichgewichtskonfigurationen

Von R. LÜST und A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforschg. 12 a, 850–854 [1957]; eingegangen am 2. September 1957)

Es werden die Bedingungen für magnetohydrodynamische Gleichgewichtskonfigurationen mit axialem Symmetrie untersucht. Das Magnetfeld wird aufgeteilt in seine meridionalen und seine toroidalen Anteile, welche durch skalare Funktionen F bzw. T beschrieben werden. Es wird gezeigt, daß der Gasdruck p und die Funktionen F und T Funktionen voneinander sein müssen. Wenn man über die Funktionen $p(F)$ und $T(F)$ verfügt, bekommt man eine Differentialgleichung für F . Die Fälle, in denen diese Differentialgleichung linear ist, werden betrachtet und die Differentialgleichung explizit gelöst, wenn $T(F) = \text{const}$ ist. In einem Spezialfall werden die magnetischen Feldlinien numerisch berechnet und in einer Abbildung angegeben. Schließlich werden noch einige Bemerkungen über die Stabilität solcher Felder angefügt.

The conditions for magneto-hydrostatic equilibrium are studied in the case of axial symmetry. The magnetic field is divided into its meridional and its toroidal parts which are described by the scalar functions F and T respectively. It is shown that the gas pressure p and the functions F and T have to be functions of each other. Taking in particular $p(F)$ and $T(F)$ as known relations, a differential equation for F is derived. The cases in which this differential equation is linear are considered and explicitly solved if furthermore $T(F) = \text{const}$. In a special case, the magnetic lines of force are calculated numerically and shown in a figure. Some remarks on the stability are added.

Ein Magnetfeld übt auf einen leitenden Körper Kräfte aus, wenn in ihm elektrische Ströme fließen, die die Feldlinien kreuzen. Leitende Körper von besonderem Interesse für die Astrophysik und für manche terrestrische Anwendungen sind Plasmen, d. h. gasförmige Leiter. Wenn Gravitationswirkungen unwichtig sind, kann statisches Gleichgewicht im allgemeinen dann nur bestehen, wenn sich die vom Magnetfeld ausgeübten Kräfte und der Gasdruck des Plasmas überall kompensieren. Da die vom Druck herrührenden Kräfte rotationsfrei sind, ist dies Gleichgewicht im allgemeinen nicht erfüllbar, sondern entspricht einer Forderung an die Konfiguration des Magnetfeldes. Ein Spezialfall des Gleichgewichtes liegt vor, wenn die Ströme im Leiter überall parallel zum Magnetfeld fließen. Solche „kraftfreien“ Magnetfelder hatten wir früher betrachtet¹. Wenn man die Möglichkeit eines Gleichgewichtes zwischen magnetischen Kräften und dem Gasdruck dazu benutzen will, um ein Plasma durch ein Magnetfeld zusammenzuhalten und einzuschließen (z. B. um die Berührung des Plasmas mit materiellen Wänden zu vermeiden), braucht man jedoch Kräfte auf das Plasma und muß das allgemeinere Gleichgewichtsproblem untersuchen. Wir beschränken uns hier dabei auf axialsymmetrische Anordnungen und be-

trachten speziell die analytisch streng lösbarer Fälle. Für einen ebenfalls axialsymmetrischen Fall, bei dem angenommen wurde, daß alle Ströme auf der Oberfläche des Plasmas fließen, wurde eine Lösung durch Reihenentwicklung in einer anderen Arbeit² gegeben.

1. Gleichgewichtsbedingungen

Das Gleichgewicht zwischen dem Gasdruck und den magnetischen Spannungen ist durch die magneto-hydrostatische Gleichung

$$\text{grad } p = -\frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B} \text{ rot } \mathfrak{B}] \quad (1)$$

beschrieben. Hierin ist p der Gasdruck und \mathfrak{B} das Magnetfeld. Im folgenden sei nun Axialsymmetrie vorausgesetzt, d. h. alle auftretenden skalaren Funktionen sollen nur vom Abstand s von der z -Achse (Symmetriechse) und vom Abstand z von der Äquatorebene abhängen, aber nicht vom Azimut φ .

Ein allgemeines zylindersymmetrisches Magnetfeld läßt sich, wie schon früher gezeigt³, in einen poloidalen und einen toroidalen Anteil zerlegen:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{s^2} \left[[e_z r] \text{ grad } F \right] + \frac{1}{s^2} [e_z r] T. \quad (2)$$

¹ R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Astrophys. 34, 263 [1954].

² L. BIERMANN, K. HAIN, K. JÖRGENS u. R. LÜST, Z. Naturforschg. 12 a, 826 [1957].

³ R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Astrophys. 38, 190 [1955].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Hierin ist \mathbf{r} der Ortsvektor und e_z der Einheitsvektor in z -Richtung. Die Funktion $F(s, z)$ hat die Bedeutung, daß durch die Gleichung $F(s, z) = \text{const}$ der Verlauf einer Feldlinie in der Meridianebene beschrieben wird, und zwar in der Weise, daß durch $2\pi F(\mathbf{r})$ der gesamte Fluß durch den Kreis gegeben ist, der durch Rotation des Punktes \mathbf{r} um die Symmetriearchse entsteht, falls man auf der Symmetriearchse $F=0$ setzt. Die Funktion $T(s, z)$ hat die analoge Bedeutung für die Linien des elektrischen Stromes.

Wegen der vorausgesetzten Axialsymmetrie gilt für p , F und T :

$$([\mathbf{e}_z \mathbf{r}] \operatorname{grad} p) = 0, \quad ([\mathbf{e}_z \mathbf{r}] \operatorname{grad} F) = 0 \\ \text{und} \quad ([\mathbf{e}_z \mathbf{r}] \operatorname{grad} T) = 0. \quad (3)$$

Damit ist die Rotation des Magnetfeldes gegeben durch:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} = \frac{1}{s^2} [\mathbf{e}_z \mathbf{r}] \mathbf{G} F - \frac{1}{s^2} [[\mathbf{e}_z \mathbf{r}] \operatorname{grad} T]. \quad (4)$$

Hierin ist \mathbf{G} ein Differentialoperator, der definiert ist durch³

$$\mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Wie CHANDRASEKHAR⁴ gezeigt hat, ist \mathbf{G} identisch mit dem LAPLACE-Operator für eine axialsymmetrische Funktion im fünf-dimensionalen euklidischen Raum. Einsetzen von Gl. (2) und Gl. (4) in die Gleichgewichtsgleichung (1) liefert nun:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{s^2} (\mathbf{G} F) \operatorname{grad} F + \frac{1}{s^2} T \operatorname{grad} T \quad (5) \right. \\ \left. + \frac{1}{s^2} [\mathbf{e}_z \mathbf{r}] ([\mathbf{e}_z \mathbf{r}] \cdot [\operatorname{grad} T \operatorname{grad} F]) \right\}.$$

Nur das letzte Glied der rechten Seite ist rein toroidal. Zur Erfüllung des Gleichgewichtes muß dieses verschwinden, d. h. die Magnetfelder müssen drehmomentfrei sein³. Es muß also

$$[\operatorname{grad} T, \operatorname{grad} F] = 0 \quad (6)$$

gelten. Diese Gleichung besagt, daß die Linien $F = \text{const}$ (Meridionalprojektionen der Feldlinien) mit den Linien $T = \text{const}$ (Meridionalprojektionen der Linien des elektrischen Stromes) zusammenfallen müssen. Sie ist erfüllt, wenn F und T Funktionen (nicht notwendig eindeutige oder umkehrbare) voneinander sind.

⁴ S. CHANDRASEKHAR, Proc. Nat. Acad. Sci. **42**, 1 [1956].

Damit bleibt für Gl. (5)

$$\operatorname{grad} p = -\frac{1}{4\pi s^2} \left\{ (\mathbf{G} F) \operatorname{grad} F + \frac{1}{2} \operatorname{grad} T^2 \right\}. \quad (7)$$

T^2 sei nun als Funktion von F genommen und es sei

$$T^2 = g(F). \quad (8)$$

Damit wird aus Gl. (7)

$$\operatorname{grad} p = -\frac{1}{4\pi s^2} \left(\mathbf{G} F + \frac{1}{2} \frac{dg}{dF} \right) \operatorname{grad} F. \quad (9)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß auch die Linien $p = \text{const}$ und $F = \text{const}$ zusammenfallen müssen, d. h. auch p und F sind Funktionen voneinander. Aus Gl. (9) bekommt man so schließlich die Gleichung (siehe auch CHANDRASEKHAR und PRENDERGAST⁵):

$$\mathbf{G} F + \frac{1}{2} \frac{dg(F)}{dF} = -4\pi s^2 \frac{dp(F)}{dF}. \quad (10)$$

(10) ist eine Differentialgleichung für F , wenn man über den Druck p und das toroidale Magnetfeld $\mathcal{V}g$ als Funktionen von F schon verfügt hat.

2. Spezielle axialsymmetrische Felder

Im folgenden sollen nun für p und s solche Ansätze gewählt werden, daß die Diff.-Gl. (10) linear in F ist. Es sei also

$$\frac{dp}{dF} = -\frac{1}{4\pi} (aF + b) \quad (11a)$$

$$\text{und} \quad \frac{dg}{dF} = 2(cF + d), \quad (11b)$$

wobei a , b , c und d Konstanten sein sollen. Damit bekommt man für Gl. (10):

$$\mathbf{G} F + cF + d = s^2(aF + b). \quad (12)$$

Der Fall $a = b = 0$ (d. h. konstanter Druck) führt zu den kraftfreien Magnetfeldern. Der Fall $c = d = 0$ bedeutet $T = \text{const}$, d. h. die toroidale Komponente des Magnetfeldes ist wirbelfrei und übt keine Kraft aus. Dieser Fall soll im folgenden betrachtet werden. Wir wollen also nun Lösungen der Diff.-Gl.

$$\mathbf{G} F = s^2(aF + b) \quad (13)$$

suchen. Zunächst sei angenommen, daß $a \neq 0$ ist. Dann ist eine Lösung gegeben durch

$$F = -b/a, \quad a \neq 0. \quad (14)$$

⁵ S. CHANDRASEKHAR u. K. H. PRENDERGAST, Proc. Nat. Acad. Sci. **42**, 5 [1956].

Eine additive Konstante in F ist aber bedeutungslos, da das Magnetfeld, entsprechend Gl. (2) nur durch die Ableitungen von F bestimmt ist.

Da die allgemeine Lösung der Diff.-Gl. durch die Überlagerung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und der obigen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben ist, brauchen wir uns im folgenden nur noch für die Lösungen der homogenen Gleichung zu interessieren. Für F machen wir dann einen Separationsansatz

$$F = S(s) Z(z). \quad (15)$$

Dies führt zu den beiden Diff.-Gln. für $S(s)$ und $Z(z)$:

$$\frac{d^2}{ds^2} S - \frac{1}{s} \frac{d}{ds} S - (a s^2 + \lambda) S = 0 \quad (16)$$

$$\text{und} \quad \frac{d^2}{dz^2} Z + \lambda Z = 0. \quad (17)$$

Hierin ist λ die Separationskonstante. Die allgemeine Lösung bekommt man dann durch Überlagerung der Lösungen von verschiedenen λ , d. h. durch Integration über λ :

$$F(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(s; \lambda) Z(z; \lambda) d\lambda. \quad (18)$$

$$S(s; \lambda) = \sqrt{a} s^2 e^{-(\sqrt{a/2}) s^2} \left\{ C(\lambda) \mathcal{F}\left(1 + \frac{1}{4} \frac{\lambda}{\sqrt{a}}, 2, \sqrt{a} s^2\right) + D(\lambda) \left[\mathcal{F}\left(1 + \frac{1}{4} \frac{\lambda}{\sqrt{a}}, 2, \sqrt{a} s^2\right) \cdot \ln(\sqrt{a} s^2) + \mathcal{F}^*\left(1 + \frac{1}{4} \frac{\lambda}{\sqrt{a}}, 2, \sqrt{a} s^2\right) \right] \right\}. \quad (24)$$

Hierin sind C und D Integrationskonstanten. $\mathcal{F}(\alpha, \gamma, x)$ ist die sog. konfluente hypergeometrische Funktion⁶ und $\mathcal{F}^*(\alpha, \gamma, x)$ ist eine Potenzreihe:

$$\mathcal{F}^* = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x}{1!} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} - 1 \right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma+1} - 1 - \frac{1}{2} \right) + \dots . \quad (25)$$

$S(s, \lambda)$ ist im Nullpunkt regulär, während sie für große Werte von s exponentiell zunimmt, da $\mathcal{F}(\alpha, \gamma, x) \sim e^x$ für große x ist. Damit das Magnetfeld im Nullpunkt regulär bleibt, muß die Integrationskonstante D Null sein.

Bisher war $a \neq 0$ angenommen worden. Es soll nun der Fall $a=0$ untersucht werden. Nach Gl.(11 a) bedeutet das, daß der Gasdruck

$$p = -(b/4\pi) \cdot F + \text{const.}$$

Wenn weiter $b=0$ wäre, so würde das bedeuten, daß die elektrische Stromdichte ($\sim \text{rot } \mathfrak{B}$) verschwind-

⁶ E. KAMKE, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1943, S. 427.

Die Lösung der Gl. (17) ist gegeben durch

$$Z(z; \lambda) = A(\lambda) e^{i\sqrt{\lambda} z} + B(\lambda) e^{-i\sqrt{\lambda} z} \quad (19)$$

mit A und B als Integrationskonstanten. Wenn $\lambda < 0$, so bekommt man Lösungen, die exponentiell von z abhängen, und für $\lambda > 0$ ergeben sich periodische Lösungen.

Zur Lösung der Diff.-Gl. (16) sei eine Variablentransformation

$$t = \sqrt{a} s^2, \quad a > 0, \quad (20)$$

durchgeführt. Dann bekommt man für (16) :

$$4 \frac{d^2 S}{dt^2} = \left(t + \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \right) S = 0. \quad (21)$$

Mit der Transformation

$$S = t e^{-t/2} y(t) \quad (22)$$

bekommt man so schließlich eine Diff.-Gl. vom konfluenten hypergeometrischen Typus

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + (2-t) \frac{dy}{dt} - \left(\frac{1}{4} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} + 1 \right) y = 0. \quad (23)$$

Die allgemeine Lösung für S ist somit gegeben durch:

det. Dieser Fall soll ausgeschlossen werden und $b \neq 0$ sein. Für die Funktion F bekommt man dann die Diff.-Gl.

$$G F = b s^2. \quad (26)$$

Da $(1/s) G F$ bei den hier betrachteten meridionalen Magnetfeldern proportional zur elektrischen Stromdichte ist, sind hier die magnetischen Kräfte mit den Druckkräften im Gleichgewicht, wenn die Stromdichte proportional zum Abstand von der Symmetrieachse zunimmt und unabhängig von z ist.

Eine inhomogene Lösung ist gegeben durch

$$F_i = \frac{b}{8} s^4, \quad (27)$$

während für den homogenen Teil der Separationsansatz Gl. (15) zu der Diff.-Gl.

$$\frac{d^2S}{ds^2} - \frac{1}{s} \frac{dS}{ds} - \lambda S = 0 \quad (28)$$

für die Funktion S führt, während für Z weiterhin die Gl. (17) gilt. Die Diff.-Gl. (27) ist vom BESEL-schen Typus und die Lösungen sind BESEL-Funktionen $Z_1(x)$ vom imaginären Argument. Die im Nullpunkt reguläre Lösung ist gegeben durch:

$$S(s; \lambda) = C(\lambda) s I_1(i\sqrt{\lambda} s). \quad (29)$$

C ist eine Integrationskonstante, die entweder imaginär oder reell ist, je nachdem ob der Wert der BESEL-Funktion imaginär oder reell ist entsprechend dem Vorzeichen von λ . Wenn $\lambda > 0$ ist, so nimmt $S(s; \lambda)$ für große Werte von s exponentiell zu, während $S(s; \lambda)$ für $\lambda < 0$ proportional zu \sqrt{s} ist, wenn s gegen Unendlich geht. In diesem Fall geht das Magnetfeld gegen Unendlich für große Werte von $|Z|$.

Für $\lambda = 0$ bekommt man speziell:

$$S(s; 0) = D s^2 + E \quad (30 \text{ a})$$

$$\text{und} \quad Z(s; 0) = G z + K, \quad (30 \text{ b})$$

wobei D, E, G und K Integrationskonstanten sind.

Im folgenden sollen als ein Beispiel Lösungen, die periodisch in z sind, noch etwas näher betrachtet werden. In diesem Fall muß also $\lambda \geq 0$ und die Integrationskonstante $G = 0$ sein. Dann ist auch der Wert der Integrationskonstante E unerheblich. Dann bekommt man für die Flußfunktion $F(s, z; \lambda)$ nach den Gln. (19), (27), (29), (30 a) und (30 b):

$$F(s, z; \lambda) = A_1 i s I_1(i\sqrt{\lambda} s) \cos(\sqrt{\lambda} z) + B_1 s^2 + \frac{b}{8} s^4. \quad (31)$$

Hierin ist der Faktor i so gewählt, daß A_1 eine reelle Integrationskonstante ist. Ebenso ist B_1 eine Integrationskonstante. Eine weitere freie Integrationskonstante ist gleich Null gesetzt worden, was nur eine Festlegung der Phasenlage in bezug auf z bedeutet.

Ein sich aus dieser Funktion $F(s, z; \lambda)$ ergebendes Feld ist in Abb. 1 wiedergegeben. Die Parameter sind so gewählt, daß der Gasdruck

$$p = -(b/4\pi) F + \text{const}$$

auf der Achse maximal ist und für alle s in einer Umgebung von $s = 0$ für wachsende s stets abnimmt. Für die speziellen Parameter der Abb. 1 ($A_1 = 1$,

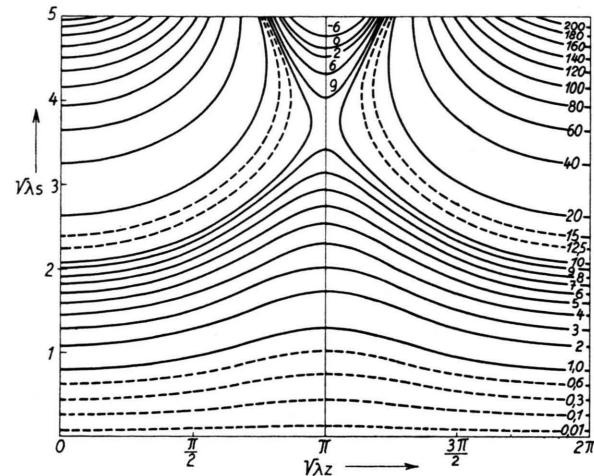


Abb. 1. Verlauf des Magnetfeldes, das durch die Flußfunktion F nach Gl. (31) mit den Parameterwerten $A_1 = B_1 = b = 1$ definiert ist. Die Zahlen an den Feldlinien sind ein Maß für den magnetischen Fluß, der durch den kreisförmigen Querschnitt zwischen der betreffenden Feldlinie und der z -Achse hindurchgeht.

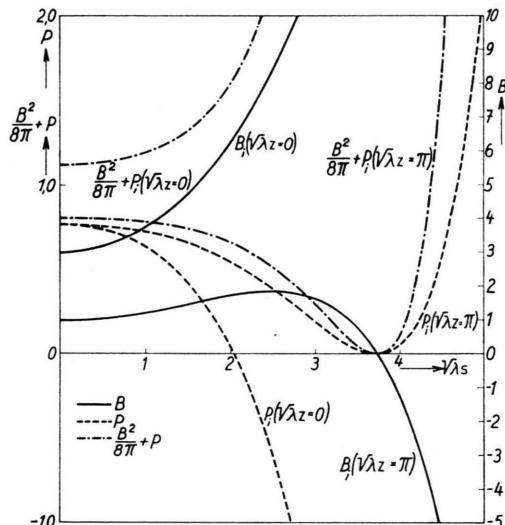


Abb. 2. Die magnetische Feldstärke B (ausgezogene Kurve), der Gasdruck p (gestrichelte Linie) und der „Gesamtdruck“ $p + B^2/8\pi$ (strich-punktierte Kurve) in Abhängigkeit vom Abstand s von der Symmetrieachse für $\sqrt{\lambda} z = 0, \pm 2\pi, \dots$ und für $\sqrt{\lambda} z = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ — B ; - - - p ; - · - - $B^2/8\pi + p$.

$B_1 = 1, b = 1$) ist dies der Fall für die Umgebung der Achse bis zu der Feldlinie, auf der $F \approx 9,6$ ist. Durch geeignete Wahl der im Druck verfügbaren Konstanten (= Gasdruck auf der Achse) läßt sich dann erreichen, daß der Druck überall im Innern

des so gebildeten Schlauches positiv ist und dort auf einer beliebigen Feldlinie einen vorgegebenen Wert, z. B. $p=0$ annimmt. Man kann diese Feldlinie dann mit der Wand eines Gefäßes identifizieren, in dessen Innerem das Magnetfeld das Plasma ganz (für $p=0$ auf der Wand) oder teilweise zusammenhält, und in dessen Äußerem unsere Gleichungen nicht gelten, sondern das Magnetfeld durch eine entsprechende Anordnung von Spulen erzeugt wird.

In Abb. 2 ist die magnetische Feldstärke und der Gasdruck p auf den Linien $z=0, \pm 2\pi, \dots$ und $z=\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ in Abhängigkeit vom Abstand von der Symmetriechse aufgetragen. Außerdem ist noch die Funktion $(B^2/8\pi) + p$ (= „Gesamtdruck“ = „magnetischer Druck“ + Gasdruck) aufgetragen. Im Falle eines gestreckten Magnetfeldes wäre diese Funktion konstant, während sie hier den Einfluß der Krümmung wiedergibt.

3. Zur Stabilität axialsymmetrischer Felder

Zum Schluß sei noch kurz auf die Stabilität dieser hier betrachteten meridionalen Felder eingegangen. In einer vorangegangenen Arbeit⁷ war die Stabilität allgemeiner Gleichgewichtskonfigurationen untersucht worden. Im Falle von meridionalen Magnetfeldern bekommt man aus der dort angegebenen Gl. (23) :

⁷ K. HAIN, R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12 a**, 833 [1957].

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int \varrho v^2 d\tau &= - \int \left\{ \gamma p (\operatorname{div} v)^2 + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot}[v \mathfrak{B}])^2 \right\} d\tau \\ &\quad + \int (v \operatorname{grad} F)^2 \frac{d^2 p(F)}{dF^2} d\tau \quad (32) \\ &+ \int \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{dp}{dF} ([e_z r] v) ([e_z r] \cdot \operatorname{grad}(v \operatorname{grad} F)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{dp}{dF} (v \operatorname{grad} F) ([e_z r] \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{s^2} ([e_z r] v)) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Hierin ist v die Geschwindigkeit des Plasmas, γ das Verhältnis der spezifischen Wärme und $d\tau$ das Volumenelement. [Zur Ableitung der Gl. (32) ist angenommen, daß die Normalkomponenten von v und \mathfrak{B} an der Oberfläche des betrachteten Volumens verschwinden.] Die Stabilität einer Gleichgewichtskonfiguration ist durch das Vorzeichen von ω^2 bestimmt, wobei $\omega^2 < 0$ Instabilität bedeutet. Aus Gl. (32) erhält man, daß das 1. Integral stets einen stabilen Beitrag liefert. Auch das 2. Integral wird stets einen stabilen Beitrag liefern, sofern überall $d^2 p(F)/dF^2 \leq 0$ ist. Das Vorzeichen des letzten Gliedes kann sowohl positiv als auch negativ sein. Man kann aber zeigen, daß der Integrand verschwindet, wenn die Störung v unabhängig vom Azimut φ ist. Meridionale Felder werden also gegen solche Störungen stabil sein, falls $d^2 p(F)/dF^2 \leq 0$ ist. Für das durch Gl. (31) beschriebene Feld (s. Abb. 1) ist aber auch Gl. (11 a) $d^2 p/dF^2 = 0$. Dieses Feld ist somit gegen Störungen, die nicht von φ abhängen, stabil.

Herrn A. KURAU möchten wir für die numerischen Rechnungen, die mit der elektronischen Rechenmaschine G 2 durchgeführt wurden, vielmals danken.